ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

КОМПЛЕКСНЫЕ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА НА ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСАХ

Соловьева Ольга Алексеевна
канд. физ. -мат. наук, доцент кафедры
«Математического образования и информационных технологий»,
Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, г. Владимир
Аветисян Анжела Артуровна
студент, физико-математического отделения кафедры
«Математического образования и информационных технологий»,
Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, г. Владимир

INITIAL INFORMATION ABOUT QUATERNIONS

Solovyova Olga Alekseevna
a candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor
of the Department of Mathematical education and information technologies,
Vladimir State University named after A. G. and N. G. Stoletov,
Russia, Vladimir
Avetisyan Anzhela Arturovna
is a student of physics and mathematics branch
of the Department of Mathematical education and information technologies,
Vladimir State University named after A. G. and N. G. Stoletov,
Russia, Vladimir
DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2020.2.63.363

АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются различные формы записи комплексных и гиперкомплексных чисел: алгебраическая (стандартная); в парах; матричная форма. Приведены примеры вычислений в перечисленных способах записи чисел.

ANNOTATION

The article deals with various forms of writing complex and hypercomplex numbers: algebraic (standard); in pairs; matrix form. Examples of calculations in the listed methods of writing numbers are given.

Ключевые слова: комплексное число, гиперкомплексное число(кватернион), алгебраическая форма, матричное представление, пары комплексных чисел, элективные курсы.

Keywords: complex number, hypercomplex number(quaternion), algebraic form, matrix representation, pairs of complex numbers, elective courses.

В связи с большими изменениями, произошедшими не только в образовательной, но и во всех остальных сферах жизни людей, возросли требования к выпускнику школы. Они касаются как общей культуры, так и научной культуры каждого выпускника. В данный момент мы будем говорить о такой культуре, как математическая.

Как известно, начиная с начальной школы вплоть до выпускного класса главным понятием в математике является понятие числа. Его изучение идет поэтапно и последовательно, то есть начинают с натуральных чисел, после вводят целые, их в свою очередь расширяют до множества рациональных чисел, переходя к действительным. На этом практически во всех общеобразовательных программах замыкают представления о множествах чисел. Конечно же, это оставляет большой пробел в знаниях школьников. Ведь естественным и логически правильным является формирование обобщенного понятия – понятия комплексного числа и кватерниона (гиперкомплексного числа). Этому есть обоснование.

Во-первых, тема «Комплексные и гиперкомплексные числа» до некоторого времени входила в образовательные программы, предназначенной для старшей школы с углубленным изучением математики.

Во-вторых, эта тема была включена в государственный стандарт среднего (полного) образования по математике (профильный уровень). Приведем небольшой фрагмент из раздела «Числовые и буквенные выражения»: «Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел…».

В-третьих, данная тема важна как область математики, в которой работают знания и умения, полученные учащимися при обучении алгебры и тригонометрии.

Анализируя выше сказанное, можно сказать, что практически во всех современных школах мало уделяют внимания комплексным числам. Одни преподаватели рассматривают эту тему на факультативах, а кто-то не излагает этот материал вообще. А ведь среди обучающихся часто можно услышать такие вопросы: например, почему при отрицательном дискриминанте нет решения именно на множестве действительных чисел или можно ли извлечь корень из отрицательного числа?

Для того, чтобы ответить на такие вопросы нужно обязательно перейти к рассмотрению нового класса чисел. Но как известно, временные ограничения в образовательных программах по математике не предоставляют такой возможности.

Соответственно, указанную тему рекомендуется рассматривать на элективных курсах по математике в старшей школе. Они являются обязательными для посещения по выбору учащихся и входят в состав профильного обучения. Такие курсы дают возможность повысить предметные и метапредметные умения, а также сформировать представление о математике, как о развивающейся культурной ценности. Одной из основных особенностей элективных курсов является то, что учащийся из предложенного набора курсов может выбрать те, которые ему интересны или нужны с точки зрения дальнейшей профессиональной деятельности [4].

В нашей работе мы рассмотрим комплексные и гиперкомплексные числа не только в алгебраической форме, но и покажем, что есть наиболее удобные варианты их записи, а точнее в виде пар (a, b) и в матричной форме.

Начнём с комплексных чисел, которые являются расширением множества действительных чисел и обозначаются C. Они могут быть записаны в алгебраической форме: $z = a + ib$, где i – мнимая единица, для которой выполняется равенство $i^2 = -1$. Сумма и произведение комплексных чисел могут быть вычислены непосредственным суммированием и перемножением таких выражений, как обычно раскрывая скобки и приводя подобные, чтобы представить результат тоже в стандартной форме (при этом надо учесть, что $i^2 = -1$): а) $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$; б) $(a + bi) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Вычислим сумму и произведение двух комплексных чисел $(3 + 4i)$ и $(1 + 3i)$ в этой форме: а) $(3 + 4i) + (1 + 3i) = 4 + 7i$; б) $(3 + 4i) \cdot (1 + 3i) = 3 + 9i + 4i + 12i^2 = 3 - 12 + 13i = -9 + 13i$.

Комплексное число также можно определить как упорядоченную пару вещественных чисел. Это пара $(a, b)\ \forall\ a, b \in R$. Запись $a + ib$ удобный способ записи пары $(a$,b). Введем операции сложения , умножения и вычитания для данного способа записи комплексных чисел: а) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; б) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, в) $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$.

Деление же определим следующим образом: пару (a, b) делим на пару (c, d). Для этого введем комплексно–сопряженное число: пара $(c, -d)$ является комплексно–сопряженной для (c, d). Получаем следующую формулу для деления: $(a, b):(c, d) = \dfrac{(a, b) \cdot (c, -d)}{(c, d) \cdot (c, -d)}$=$(ac - bd, ad + bc)$: $(c^2 + d^2, 0)$ =$\left(\frac{ac-bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

Рассмотрим примеры сложения и умножения в парах: а) $(3,4) + (1,3) = (3 + 1,4 + 3) = (4,7)$; б) $(3,4) \cdot (1,3) = (3 \cdot 1 - 4 \cdot 3, 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = (3 - 12, 9 + 4) = (-9, 13)$.

Укажем также, что всякое комплексное число можно представить в матричной форме, которое будет иметь следующий вид: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Покажем сложение и умножение двух комплексных чисел в матричной форме: а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 4+3 \\ -4-3 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ – это и есть пара $(4, 7)$; б)$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) & -4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -13 & -9 \end{pmatrix}$ – это и есть пара $(-9,13)$.

Обобщая понятия числа, ученые вывели такие числа, арифметические действия над которыми позволили одновременно выражать геометрические процессы в пространствах разной размерности и давать количественное описание каких-либо физических законов. К ним относятся кватернионы (четырёхмерные числа).

Кватернион (гиперкомплексное число) – это математический объект вида $q = a + bi + cj + dk$, Wpisz tutaj równanie.где a, b, c, d – действительные числа причем a есть множитель действительной единицы 1 (которая часто опускается в записи), величины i, j, k носят условное название мнимых кватернионных единиц; их квадраты равны действительной единице со знаком минус $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ [1].

Алгебраической формой записи кватернионов будем считать запись вида $q = a + bi + cj + dk$. Тогда суммой двух кватернионов $(a + bi + cj + dk)$ и $(e + +fi + gj + hk)$ будет является кватернион $\big((a + e) + i(b + f) + j(c + g) + k(d + h)\big)$, а произведением – кватернион вида: $(ae - bf - cg - dh) + (af + eb + ch - dg)i + (ag + ac - dh + fd)j + (ah + ed + bg - cf)k$. Последнее правило производится как умножение двух многочленов с учётом того, что $ij = k,\ jk = i,\ ki = j$ и $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ *(табл.1)* [3].

Таблица 1.

Умножение базисных векторов

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Рассмотрим сложение и умножение кватернионов по определению:
а) $(2+2i-3j-4k)+(3-3i-2j+3k)=(2+2i-3j-4k+3-3i-2j+3k)=5-i-5j-k$;
б) $(2+2i-3j-4k)\cdot(3-3i-2j+3k)=(6-6i-4j+6k)+(6i-6i^2-4ij+6ik)+(-9j+9ji+6j^2-9jk)+(-12k+12ki+8kj-12k^2)=$(пользуясь таблицей 1, заменяем ij на k, ik на $-j$ и т.д.) $=(6-6i-4j+6k)+(6i+6-4k-6j)+(-9j-9k-6-9i)+(-12k+12j-8i+12)=(18-17i-7j-19k)$.

А теперь представим кватернион в такой же форме, как и комплексное число, только если в комплексном числе a, b были действительными, то тут они будут комплексными.

Запишем сложение и умножение кватернионов вида q через пару комплексных чисел (z,w). Для этого покажем, как от стандартного вида перейти к паре комплексных чисел: $a+bi+cj+dk=a+bi+j\left(c+\frac{dk}{j}\right)=$ (выписываем первые слагаемые, выносим из третьего и четвертого слагаемых j за знак скобки, и чтобы избавится от сопряжения, мы числитель и знаменатель домножаем на j) $=a+bi+j(c+\frac{djk}{j\cdot j})$ =(пользуясь таблицей 1, заменяем jk на i)= $(a+bi+j(c-di))$. Таким образом получаем, $q=a+bi+cj+dk=(a+bi, c-di)$.

Сложение двух кватернионов q и q' в виде пар (z,w) и (z',w') будет иметь вид: $(z,w)++(z',w')=(z+z',w+w')$, а умножение: $(z,w)\cdot(z',w')=(zz'-\overline{w}w',\overline{z}w'+wz')$.

Замечание: $\overline{z}$ и $\overline{w}$ являются комплексно-сопряжёнными числами для z и w соответственно.

Представим кватернионы $2+2i-3j-4k$ и $3-3i-2j+3k$ в виде пар комплексных чисел, получим $2+2i-3j-4k=2+2i+j\left(-3-\frac{4k}{j}\right)=2+2i+j\left(-3-\frac{4jk}{j^2}\right)=\quad 2+2i+j(-3+4i)=(2+2i,-3+4i)$ и $3-3i-2j+3k=3-3i+j\left(-2+\frac{3k}{j}\right)=3-3i+j\left(-2+\frac{3jk}{j^2}\right)=3-3i+j(-2-3i)=(3-3i,-2-3i)$.

Рассмотрим пример, как вычислять сумму двух гиперкомплексных чисел в парах: $(2+2i,-3+4i)+(3-3i,-2-3i)=\ (2+2i+3-3i,-3+4i-2-3i\ )=(5-i,-5+i\ )$. Полученную пару представим в виде кватерниона. Для это умножим $(-5+i\ )$ на j: $(5-i+(-5j+ji))=(5-i-5j-k)$.

Прежде чем приступить к умножению данных пар, найдем сопряжённо-комплексные для $(2+2i)$ и для $(-3+4i)$: это $(2-2i)$ и $(-3-4i)$. Теперь применим правило умножения: $(2+2i,-3+4i)(3-3i,-2-3i)=\big((2+2i)(3-3i)-(-3-4i)(-2-3i),(2-2i)(-2-3i)+(-3+4i)(3-3i)\ \big)=(\ 18-17i,-7+19i)$. Полученную комплексную пару перепишем в виде кватерниона, предварительно домножив каждое слагаемое мнимой части слева на j: $(-7j+19ji)=(-7j-19k)$. Окончательный ответ будет иметь вид: $(18-17i-7j-5k)$.

Рассмотрим еще один способ записи гиперкомплексных чисел. Представим кватернионы как комплексные матрицы с обычными матричными произведением и суммой: $\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ -b & \overline{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначают комплексно-сопряженные числа к a и b: $a-bi$ и $c-di$ [2].

При проведении арифметических операций над кватернионами в данной форме опираются на правила умножения и сложения матриц, а также на их свойства. Покажем это на примере.

Вычислим сумму двух гиперкомплексных чисел $2+2i-3j-4k$ и $3-3i-2j+3k$. Предварительно представим их в виде пар комплексных чисел (переход от алгебраической формы к парам показан выше): $(2+2i,-3+4i)$; $(3-3i,-2-3i)$. Далее запишем в матричной форме: $\begin{pmatrix} 2+2i & -3-4i \\ 3-4i & 2-2i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3-3i & -2+3i \\ 2+3i & 3+3i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2i+3-3i & -3-4i-2+3i \\ 3-4i+2+3i & 2-2i+3+3i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-i & -5-i \\ 5-i & 5+i \end{pmatrix}\rightarrow$ $(5-i,-5+i\ )$. Здесь же, если каждое слагаемое мнимой части домножить на j, получим кватернион в стандартной форме: $(5-i-5j-k)$.

А теперь продемонстрируем произведение этих чисел в матричной форме: $\begin{pmatrix} 2+2i & -3-4i \\ 3-4i & 2-2i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3-3i & -2+3i \\ 2+3i & 3+3i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2+2i)(3-3i)+(-3-4i)(2+3i) & (2+2i)(-2+3i)+(-3-4i)(3+3i) \\ (3-4i)(3-3i)+(2-2i)(2+3i) & (3-4i)(-2+3i)+(2-2i)(3+3i) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-6i+6i+6-6-9i-8i+12 & -4+6i-4i-6-9-9i-12i+12 \\ 9-9i-12i-12+4+6i-4i+6 & -6+9i+8i+12+6+6i-6i+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18-17i & -7-19i \\ 7-19i & 18+17i \end{pmatrix}\rightarrow$ $(18-17i,-7+19i\ )$. Далее каждое слагаемое мнимой части домножим на j, получим кватернион в алгебраической форме: $(18-17i-7j-19k)$.

В целом, наши результаты демонстрируют вариативность способов записи комплексных и гиперкомплексных чисел, а также возможность проведения арифметических действий над ними в различных формах. Это говорит о том, что представление о гиперкомплексных числах способствует расширению кругозора обучающихся, также тренирует интуицию и подготавливает её к восприятию неизвестного, нового.

Список литературы:

1. Арнольд, В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов, М.: МЦНМО, 2002.
2. Мельников Ю. Б. Кватернионы [электронный документ] // Ю. Б. Мельников — http://melnikov.k66.ru 2012.
3. Приходовский, М. А. Комплексные и гиперкомплексные числа : учеб. пособие / М. А. Приходовский ; Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. — Томск, 2013. — 32 с.
4. Цулина, И. В. Элективные курсы в системе школьного математического образования / И. В. Цулина. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2009. — № 11 (11). — С. 326-327.

СКАЗКА ЛОЖЬ ДА В НЕЙ НАМЕК: ВСЕМ ОТКРЫТИЯМ УРОК.

Барыкинский Геннадий Михайлович
Москва, Россия

TALE LIE YES IT HINT: ALL THE DISCOVERIES THE LESSON.

Barykinskiy Gennady Mikhailovich
Moscow, Russia

DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2020.2.63.360

АННОТАЦИЯ

Обсуждается идея, в соответствии с которой в Природе создание объектов, обладающих высшим уровнем сложности не только по сравнению с любой составной его частью, но и любым объектом окружающей его окрестности, происходит в пограничном слое двух несмешивающихся (невзаимодействующих) сред. В частности, рассмотрены экспериментальные результаты по созданию компартментов в пограничном слое двух несмешивающихся жидкостей.

ABSTRACT

We discuss the idea that in Nature, the creation of objects with the highest level of complexity, not only in comparison with any component part of it, but also any object of its surrounding neighborhood, occurs in the boundary layer of two immiscible (non-interacting) media. In particular, experimental results on the creation of compartments in the boundary layer of two immiscible liquids are considered.

Ключевые слова: пограничные слои, невзаимодействующие среды, пленки, компартменты, яйцо.
Keywords: boundary layers, non-interacting media, films, compartments, egg.

Вещей суть познавая,
Мы обретаем знание.
А смысл вещей осознавая,
Мы создаем сознание.

Бытие Человека, в его глобальном понимании как биологического вида, возникло и развивается в пограничном слое двух несмешивающихся сред, т. е. земли и атмосферы.

Однако стремительное развитие сознания Человека позволило ему непрерывно расширять сферу своего присутствия. Так создание Человеком плавательных средств позволило ему расширить сферу своего присутствия за счет освоения нового пограничного слоя двух несмешивающихся сред, т. е. воды и атмосферы. Но этого оказалось ему недостаточно, его взоры устремились в направлении освоения всех сред: твердой, жидкой, газообразной и космической.

С древнейших времен Человек мечтал летать в небе как птицы и плавать в море как рыбы. На пути к этим целям простые желания превращались в сказки, последние в свою очередь приводили к фантастическим идеям и проектам, воплощение в жизнь многих из которых, становилось все более реалистичным.

Наиболее ярким представителем, мечты и фантазии которого в полной мере соответствуют идеям полета человека в небе, был итальянец - **Леонардо да Винчи (1452-1519)**. До наших дней дошли его чертежи летательной машины и парашюта.

Не менее ярким представителем был и русский автор научно-фантастических произведений **Циолковский К.Э. (1857-1935)**. Он еще в 1885 году заявил: "Я твёрдо решился отдаться воздухоплаванию и теоретически разработать металлический управляемый аэростат", и уже в 1887 году Константин Эдуардович выступил в московском Политехническом музее на заседании Физического отделения Общества любителей естествознания с докладом: "О возможности