ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

О НОВЫХ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ, МНОГОМЕРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Матусов Л.Б.
Кандидат техн. наук
Институт Машиноведения Российской Академии Наук,
старший научный сотрудник
Москва

ON A NEW UNIFORMLY DISTRIBUTED MULTIDOMENSHIONAL SEQUENSES

Matusov L.B.
Candidate of Science,senior researcher
of Mechanical Engineering Reseach Institute,Russia Akademy of Science,
Moskow
DOI: 10.31618/nas.2413-5291.2020.1.61.315

АННОТАЦИЯ

Целью статьи является исследование одного важного свойства равномерности ЛПτ - последовательностей, применяющихся в задачах оптимизации, многокритериального проектирования мащин, конструкций и т.д. Исследование проводится с помощью методов теории двоично- рациональных последовательностей. Доказано , что можно конструировать ЛПτ - последовательность так, чтобы у направляющих матриц, соответствующих различным координатам ее точек, все угловые определители были равны I (mod 2).

ABSTRACT

The purpose of the article is to study one important property of the uniformity of LP sequences used in optimization problems, multi-criteria design of machines, structures, etc. The research is carried out using methods of the theory of binary - rational sequences. Was proofed that there exist LPτ -sequences such that corresponding direction matrices have all corner determinants are equal to 1(mod 2).

Ключевые слова: равномерно распределенная последовательность, моноциклический оператор, направляющая матрица.

Key words: uniformly distributed sequences, monocyclic operators, direction matrix.

1.Введение.

Последовательности многомерных точек, могут обладать различными свойствами равномерности [1].Сложность заключается в том, что для решения практических задач эти свойства должны выполняться уже при сравнительно небольших количествах точек. Только в этом случае данные последовательности могут быть успешно использованы при решении практических задач,относящихся к теории кубатурных формул, в задачах оптимизации , многокритериального проектирования машин, конструкций и т.д. С этой целью в [2] были сформулированы некоторые дополнительные требования к равномерно распределенным последовательностям, а также условия [1], обеспечивающие, как это показано в данной работе, существование новых ЛПτ - последовательностей.

2. Построение новых ЛПτ - последовательностей.

В [1] приводится следующий результат. Если в качестве в матрицы направляющих числителей взять такую, у которой все угловые определители равны 1(mod 2), то определенная этой матрицей ДР - последовательность будет ЛП0- последовательностью.

Возникает вопрос нельзя ли из таких последовательностей, определяющих значения различных координат многомерных точек, построить ЛПτ - последовательность? Приводимые ниже результаты дают возможность обобщить на рассматриаемый случай теорему из [1], в которой приводится конструкция ЛПτ - последовательности.

Пусть L- моноциклический оператор порядка m.Рассмотрим последовательность операторов L,L2, …,Ln,… . Каждому оператору Ln в этой последовательности поставим в соответствии его m линейно независимых решений

$$\{u_{11}^{(n)},\ldots,u_{k1}^{(n)},\ldots\},\ldots,\{u_{1m}^{(n)},\ldots,u_{km}^{(n)},\ldots\},\quad (1)$$

причем любое решение оператора Ln не является решением оператора L$n-1$.

При этом первые nm элементов в каждой из последовательностей (1) выбраны так, чтобы в матрице

$$\begin{pmatrix} u_{11}^{(1)}\ldots u_{1m}^{(1)}\ldots u_{11}^{(n)}\ldots u_{1m}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{k1}^{(1)}\ldots u_{km}^{(1)}\ldots u_{k1}^{(n)}\ldots u_{km}^{(n)} \end{pmatrix}\quad (2)$$

все угловые определители были равны 1(mod 2). Положим, что $\hat{L}p$ - произвольная степень отличного от L моноциклического оператора $\hat{L}$..

Лемма 1. Операторы $\hat{L}p$ и Lk не имеют общих решений.

Доказательство. Действительно, пусть { ui }- одна из последовательностей в (1) такая, что Lk (ui) =0. Тогда если бы имело место $\hat{L}p$ (ui) =0, то L$k-1$ $\hat{L}p$ (ui) = $\hat{L}p$ L$k-1$ (ui) = 0. А это не так потому, что L$k-1$ (ui) – есть не тривиальное решение моноциклического оператора L. Вследствии леммы 4 параграфа 2 из [1], оно не может быть решением оператора $\hat{L}p$.

Лемма 2. Результат действия оператора L$\hat{L}p$ на любые n (n≤m) линейно независимые решения оператора Lkесть n линейно независимые решения оператора L$k-1$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\hat{L}p$сохраняет линейную независимость решений оператора Lk. Подействуем оператором $\hat{L}p$ на n решений оператора Lk. Т.к. $\hat{L}p$ линейный оператор, то линейная зависимость полученных решений означала бы, что $\hat{L}p$ ($\sum u_{ij}^{(k)}$) = 0, i = 1,2,3,… . Но $\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(k)}$есть не тривиальное решение Lk в силу линейной независимости n выбранных решений. А т.к. решение Lkне может быть решением $\hat{L}p$,то полученные решения линейно независимы. Теперь подействуем оператором L на рассматриваемые решения оператора Lk. Понятно, что таким образом получим n решений оператора L$k-1$. Они линейно независимы. Действительно, обратное означает, что $\sum_{j=1}^{n} L(u_{ij}^{(k)})$ =$L(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(k)})$ = 0. Сумма $\sum u_{ij}^{(k)}$не есть решение оператора L, т.к. матрица (2) содержит все m линейно независимых решений оператора L. Если бы $\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^{(k)}$была решением оператора L , то она выражалась бы линейно через эти m решений. Но это находится в противоречии с условием, что все угловые определители в (2) были равны 1(mod 2).

Теорема . Пусть L1,L2,…,Ln - различные моноциклические операторы, порядки которых равны m1,m2,…,mn. Каждому оператору Lk поставим в соответствие матрицу (U $_{ij}^{(kl)}$), аналогичную (2). Пусть { Pi }- последовательность точек с координатами, определяемыми этими матрицами, в соответствии с [1]. Тогда Pi = (p1 (i),…,pn (i)) – есть ЛПτ - последовательность в единичном кубе Kn со значениями $\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k$- 1.

Доказательство. Согласно доказательству указанной выше теоремы 4 из [1], для того, чтобы произвольный двоичный участок последовательности длины 2ν был Пτ - сеткой необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\left(W_{ij}\right)=\begin{pmatrix} V_{11}^{(11)}\dots V_{1\mu_1}^{(1k_1)}\dots V_{11}^{(n1)}\dots V_{1\mu_n}^{(nk_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ V_{\nu 1}^{(11)}\dots V_{1\mu_1}^{(1k_1)}\dots V_{\nu 1}^{(n1)}\dots V_{\nu\mu_n}^{(nk_n)} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

составленной из $\nu-\tau$ столбцов матриц направляющих чисел, соответствующих различным моноциклическим операторам, был равен $\nu-\tau$.

Обозначим через $\mu_k^{'}$ остаток от деленияμ_kна mk так, что μ_k=$\rho_k m_k+\mu_k^{'}$. Пусть $\rho_1 \geq 1$.Оставим в (3) первые m1 строк без изменений, а остальные будем заменять линейными комбинациями строк в соответствии с действием оператора L1. Получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} V_{11}^{(11)} & \dots & V_{1m_1}^{(1l_1)} & & & & \\ . & . & . & & W_{ij} & & \\ V_{m_1 1}^{(11)} & \dots & V_{m_1 m_1}^{(1l_1)} & & & & \\ & & & V_{11}^{'(11)} & \dots & V_{1\mu_1-m_1} & \\ & 0 & & . & . & . & L_1 w_{ij} \\ & & & V_{\nu-m\ 1}^{'(11)} & \dots & V_{\nu-m_1\mu_1-m}^{'(1d_1} & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \quad (4)$$

В верхнем углу, согласно условию теоремы, находится невырожденная матрица. Нетрудно видеть, что столбцы $V_{ij}^{'(1k)}$, $k \leq d_1, j \leq \mu_1-m_1$, являющиеся участками решений оператора L1, линейно независимы. Если ρ_1>1, то в нижней части матрицы (4) повторяем то же преобразование ρ_1раз. Если $\mu_1^{'}>0$, то после этих преобразований останутся $\mu_1^{'}$ столбцов с элементами $V_{ij}^{'(1l)}$. Перенесем их в конец матрицы. Получим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & B_1 & & & & & & & & \\ & & & \overline{V_{11}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{1\mu_2}^{(2k)_2}} & \dots & \overline{V_{11}^{(n1)}} & \dots & \overline{V_{1\mu_n}^{(nk_n)}} & V_{11}^{'(11)} & \dots & V_{1\mu_1^{'}}^{'(1l^{'})} \\ . & & & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad (5)$$

Согласно лемме 2, $\overline{V_{11}^{(pk_p)}}$, 2≤ $p \leq n$, есть участки решений оператора L $_{p}^{k_p}$.

В силу этой леммы, столбцы $\overline{V_{ij}^{(21)}}$, $1 \leq j \leq m_2$, образуют матрицу

B = $\begin{pmatrix} \overline{V_{11}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{1m_2}^{(21)}} \\ . & . & . \\ \overline{V_{m_2 1}^{(21)}} & \dots & \overline{V_{m_2 m_2}^{(21)}} \end{pmatrix}$, определитель которой равен 1.Посредством L2с нижней частью матрицы (5) (расположенной под B1) проделаем преобразования, аналогичные предыдущим. Оставшиеся $\mu_2^{'}$ столбцов перенесем в конец матрицы. Проделав такие же преобразования со всеми Lk, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
B_1 &&&&&&&&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&&&&&&&& \\
&& B_1 &&&&&&&&&&&&&& \\
&&& B_2 &&&&&&&&&&&&& \\
&&&& \ddots &&&&&&&&&&&& \\
&&&&& B_2 &&&&&&&&&&& \\
&&&&&& \ddots &&&&&&&&&& \\
&&&&&&& B_n &&&&&&&&& \\
&&&&&&&& \ddots &&&&&&&& \\
&&&&&&&&& B_n &&&&&&& \\
&&&&&&&&&& V_{11}^{'(11)} & \dots & V_{1\mu_1}^{'(11)} & \dots & V_{11}^{'(n1)} & \dots & V_{1\mu_n^{'}}^{'(n1)} \\
&&&&&&&&&& . & . & . & . & . & . & . \\
&&&&&&&&&& V_{\nu^{'}1}^{'(11)} & \dots & V_{\nu^{'}\mu_1}^{'(11)} & \dots & V_{\nu^{'}1}^{'(n1)} & \dots & V_{\nu^{'}\mu_n^{'}}^{'(n1)}
\end{array}\right) \quad (6)$$

Здесь $\nu^{'} = \mu_1^{'}+\ldots+\mu_n^{'} + \tau$ и элементы остаточной матрицы

$$V_{ij}^{'(k1)} = \mathrm{L}\ldots\mathrm{L}\ {}_{k-1}^{\rho_{k-1}}\mathrm{L}\ {}_{k+1}^{\rho_{k+1}}\ldots\mathrm{L}\ {}_{n}^{\rho_n}V_{ij}^{(k1)} \quad (7)$$

Если бы все ρ_k были равны 0, то исходная матрица уже имела бы вид (6).

В виду того, что в (7) $j \leq \mu_k^{'} < m_k$, то L$_k$ $V_{ij}^{'(k1)} = 0$. Значит столбцы остаточной матрицы - это участки решений моноциклических уравнений. Пусть среди $\mu_k^{'}$ всего s чисел, отличных от нуля. Обозначим их через $\mu_f^{'}$, $1 \leq f \leq s \leq n$. Все решения $V_{ij}^{'(k1)}$, соответсвующие одному f, линейно независимы в силу леммы 2. $\nu^{'} = \sum_{k=1}^{m}(m_k - 1) + \sum_{f=1}^{s}\mu_f^{'} \geq \sum_{f=1}^{s}(m_f + \mu_f^{'} - 1) \geq \sum_{f=1}^{s} m_f$. Поэтому из леммы 7 параграфа 3 [1] следует, что все столбцы остаточной матрицы линейно независимы, т.е., что ее ранг равен $\mu_1^{'}+\ldots+\mu_n^{'}$. А ранг всей матрицы равен $\nu - \tau$. Теорема доказана.

Выводы

Доказана возможность конструировать ЛПτ - последовательность так, чтобы у направляющих матриц, соответствующих различным координатам ее точек, все угловые определители были равны I (mod 2). Это приводит к расширению класса дополнительных свойств равномерности ЛПτ - последовательностей.

Литература.

1. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.// – Москва, Наука,. 1969, С. 288.

2.Соболь И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. Москва, – Знание.1985. С. 125.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ КУРСАНТОВ ДЕЙСТВИЯМ НАД МАТРИЦАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

Паршин Анатолий Васильевич
кандидат физ.-мат. наук, профессор
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж
Репин Дмитрий Денисович
курсант
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

INCREASING THE EFFICIENCY OF TRAINING CURSANTS ON ACTIONS ON MATRICES USING MS EXCEL

Anatoly Vasilievich Parshin
candidate of physical and mathematical sciences, professor
Military Research Center of the Air Force «Air Force Academy named after prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin»Voronezh
Repin Dmitry Denisovich
cadet