# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

***Алейдаров С. М.***
*Дагестанский государственный университет,*
*г. Махачкала, Россия*

**АННОТАЦИЯ**

В статье рассматриваем уравнение нейтрального типа с линейным отклонением аргумента в гильбертовом пространстве со степенным весом. Наличие линейного отклонения аргумента и переменного коэффициента перед производной не позволяет применить преобразование Фурье для исследования уравнения нейтрального типа. Поэтому при рассмотрении вопросов разрешимости и асимптотики мы использовали преобразование Меллина.

Для уравнения нейтрального типа с постоянными операторными коэффициентами получены достаточные условия однозначной разрешимости через резольвенту.

Для уравнения нейтрального типа с переменными коэффициентами получены оценки переменных частей, обеспечивающие однозначную разрешимость.

Получена асимптотическая оценка всех решений уравнения в случае, когда нет однозначности решения.

**Ключевые слова:** нейтральный тип, степенной вес, разрешимость, гильбертово пространство

К решению линейного дифференциального уравнения с линейным отклонением аргумента нейтрального типа приводит изучение собственных колебаний в волновой среде с периодически изменяющимися граничными условиями. Такими системами являются, например, оптический резонатор и струна с колеблющейся границей, балки с переменной нагрузкой на конце, а в радиофизике и радиоэлектронике - применяемые в информационных вычислительных и измерительных устройствах волновые системы с периодически изменяющейся ёмкостью на границе.

Линейная система вида

$$t \cdot X'(t) = \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & C \\ C_0 & \mu_2 \end{pmatrix}\right] X(t),$$

где $\mu_2 - \mu_1 = \alpha + \beta, C \cdot C_0 = -\alpha \cdot \beta$ и $\alpha - \beta$ – нецелое число, $|\lambda_1 - \lambda_2| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq 0$ в комплексной области изучено в [1].

В этой работе получена асимптотика фундаментальной системы вида

$$X_i(t) = t^{P_i} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{G}_i(m) t^m, i = 1,2$$

при $t \to \infty$ в некотором секторе комплексной плоскости.

Структуру решений трехчленного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в окрестности особой точки изучено в [2]. В этой работе для скалярного уравнения

$$t \cdot y'(t) = a(t) y(\lambda t) + b(t) y(t), 0 < \lambda < 1$$

изучается структура решений, определенных на ]0;Д[ и рассматривается взаимное влияние на поведение решений в окрестности особой точки $t = 0$ членов с запаздыванием и без запаздывания.

Обобщением вышеуказанных уравнений является уравнение, рассматриваемое в этой работе.

В статье мы рассматриваем уравнение нейтрального типа

$$L(t)U(t) = \sum_{j=0}^{m} \left\{ tU'(b_j t) + \left[A_j + A_j(t)\right] U(a_j t) \right\} = f(t) \quad (1)$$

с неограниченными операторными коэффициентами

$$A_j, A_j(t) : Y \to Y, \mathcal{D}(A_j) = \mathcal{D}\left(A_j(t)\right) = X \subset Y, j = 0,1, \dots, m,$$

$X, Y$- гильбертовы пространства, $a_0 = 1, 0 < a_j, b_j < 1$.

Наличие линейного отклонения аргумента и переменного коэффициента перед производной не позволяет применить преобразование Фурье [3] для исследования уравнения нейтрального типа. Поэтому при рассмотрении вопросов разрешимости и асимптотики мы использовали преобразование Меллина[4].

Будем говорить, что $U(t)$ принадлежит $L_2(R^+, H)$, если $U(t) \in H$ и

$$\int_0^\infty ||U(t)||_H^2 \frac{dt}{t} < +\infty,$$

где H – гильбертовое пространство[5].

Пусть $t^\sigma U(t) \in L_2(R^+, H)$.

Тогда

$$\widetilde{U}(\lambda, a) = \int_{1/a}^{a} U(t) t^{\lambda-1} dt \ \ (Re\, \lambda = \sigma)$$

сходится в среднем квадратичном на прямой $Re\, \lambda = \sigma$ к некоторой функции $\widetilde{U}\,(\lambda)$;

$$\widetilde{U}(t, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widetilde{U}(\lambda) t^{-\lambda} d\lambda$$

сходится в среднем к $U(t)$ , в том смысле, что

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^\infty ||U(t) - U(t,a)||_H^2 t^{2\sigma-1} dt = 0$$

и

$$\int_0^\infty ||U(t)||_H^2 \, t^{2\sigma-1} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left|\left|\widetilde{U}(\sigma + it)\right|\right|_H^2 dt.$$

**Определение 1**. Пополнение множества функций $U(t), U(0) = 0$ с компактными носителями и со значениями в $X$ , имеющих сильно непрерывные производные в $Y$ по норме

$$||U(t)||^{1,\sigma} = \left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1} \left(||U(t)||_x^2 + ||tU'(t)||_y^2\right) dt\right)^{1/2}, \sigma > 0$$

обозначим через $X^{1,\sigma}$.

**Определение 2**. Пополнение множества сильно непрерывных функций $f(t), f(0) = 0$, с компактными носителями и со значениями в $Y$, по норме

$$||f(t)||^{1,\sigma} = \left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1} ||f(t)||_y^2 dt\right)^{1/2}$$

обозначим через $Y^{0,\sigma}$ .

Для уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами

$$LU(t) \equiv \sum_{j=0}^m \left\{tU'(b_j t) + A_j U(a_j t)\right\} = f(t) \ (2)$$

определим понятие резольвенты.

Определение 3. [9] Операторнозначную функцию

$$R(\lambda) = \left(\sum_{j=0}^m \left\{A_j a_j^{-\lambda} - \lambda b_j^{-\lambda-1}\right\}\right)^{-1}$$

назовем резольвентой уравнения (2).

**Лемма 1**. Оператор $L(t) : X^{1,\sigma} \to Y^{0,\sigma}$ из (2) непрерывен.

Доказательство.

Пусть $U(t)$ любой элемент пространства $X^{1,\sigma}$. Оценим квадрат нормы

$$\left(||L(t)U(t||^{0,\sigma}\right)^2 \leq C_A \cdot (m+1)\sum_{j=0}^{m}\left(\int_0^\infty \left||U(a_jt)|\right|_x^2 dt + \int_0^\infty t^{2\sigma-1}||tU'(t)||_y^2 dt\right) =$$

$$C_A(m+1) \cdot \sum_{j=0}^{m}\left(\int_0^\infty {a_j}^{1-2\sigma}t^{2\sigma-1}\left||U(a_jt)|\right|_x^2 dt\right.$$
$$\left. + {b_j}^{-2\sigma-2} \cdot \int_0^\infty t^{2\sigma-1}\,||tU'(t)||_y^2 dt\right) \leq$$

$$C_AC_{ab} \cdot (m+1) \cdot \left(||U(t)||^{1,\sigma}\right)^2,$$

где

$$\mathrm{C}_A = \max_{j\geq 0, t\geq 0}\left||A_j + A_j(t)|\right|_y, C_{ab} = \max_{j\geq 0}\{a_j^{1-2\sigma}, b_j^{-2\sigma-2}\}.$$

Отсюда следует, что

$$||L(t)||_{X^{1,\sigma}\to Y^{1,\sigma}} \leq \sqrt{(m+1)C_AC_{ab}}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1**. Для существования и единственности решения $U(t) \in X^{1,\sigma}$ уравнения (2) при любой правой части $f(t) \in Y^{1,\sigma}$достаточно, чтобы резольвента $R(\lambda)$ была регулярна и $||R(\lambda)||_x + |\lambda| \cdot ||R(\lambda)||_y = 0\ (1)$ на прямой $Re\lambda = \sigma$ при$|\lambda| \to \infty$.

**Доказательство.** Применяя к уравнению (2) преобразование Меллина [4], получим

$$\sum_{\text{o}=0}^{\text{ь}}\{A_ja_j^{-\lambda} - \lambda b_j^{-\lambda-1}\}\widetilde{U}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda),$$

$$\widetilde{U}(\lambda) = R(\lambda)\tilde{f}(\lambda).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda}\,\widetilde{U}(\lambda)d\lambda,$$

где $\widetilde{U}(\lambda) = R(\lambda)\tilde{f}(\lambda)$ существует в силу условий теоремы. Докажем сильную непрерывность функции $U(t)$при $t > 0$. Для простоты положим $\sigma = 0$. Тогда

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^{i\lambda}\,R(-i\lambda)\tilde{f}(-i\lambda)d\lambda$$

оценим норму приращения функции

$$||U(t+h) - U(t)||_y \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|(t+h)^{i\lambda} - t^{i\lambda}\right| \cdot \left||R(-i\lambda)\tilde{f}(-i\lambda)|\right|_y d\,\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(t+h)^{i\lambda} - t^{i\lambda}}{\lambda^2}\right| \cdot \left||-i\lambda R(-i\lambda)\tilde{f}(-i\lambda)|\right|_y d\,\lambda \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|(t+h)^{i\lambda} - t^{i\lambda}\right|^2}{\lambda^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left||-i\lambda R(-i\lambda)\tilde{f}(-i\lambda)|\right|_y^2 d\lambda\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}\cdot\ln(1+\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{t}})}{\lambda^2}d\lambda\right)^{1/2}\leq C_1\sqrt{\ln\left(1+\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{t}}\right)}.$$

Отсюда следует сильная непрерывность функции $U(t)$.

Тот факт, что функция, определяемая равенством удовлетворяет уравнению, проверяется непосредственной подстановкой.

Докажем, что $U(t)\in X^{1,\sigma}$ при $f(t)\in Y^{0,\sigma}$

$$\int_0^{\infty}t^{2\sigma-1}\left||U(t)|\right|_x^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left||\widetilde{U}(\sigma+it)|\right|_x^2dt\leq$$

$$\leq\frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left||\tilde{f}(\sigma+it)|\right|_y^2dt=C_1\int_0^{\infty}t^{2\sigma-1}\left||U(t)|\right|_y^2dt.$$

Аналогично,

$$\int_0^{\infty}t^{2\sigma-1}\left||tU'(t)|\right|_y^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left||(\sigma+it)R(\sigma+it)\tilde{f}(\sigma+it)|\right|_y^2dt\leq$$

$$\leq\frac{C_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left||\tilde{f}(\sigma+it)|\right|_y^2dt=C_3\int_0^{\infty}t^{2\sigma-1}\left||U(t)|\right|_y^2dt.$$

Из этих неравенств следует оценка

$$\left||U(t)|\right|^{1,\sigma}\leq C\cdot\left||f(t)|\right|^{0,\sigma},$$

из которой вытекает единственность решения уравнения и принадлежность его пространству $X^{1,\sigma}$.

Теорема доказана.

Для уравнения с переменными коэффициентами (1) имеет место следующая

**Теорема 2**. Если резольвента $R(\lambda)$ регулярна,

$$\left||R(\lambda)|\right|_x+|\lambda|\cdot\left||R(\lambda)|\right|_y=0(1),|\lambda|\to\infty,Re\lambda=\sigma,$$

$$\left||A_j(t)|\right|_y<\left(\left||L^{-1}|\right|^{1,\sigma}\sqrt{(m+1)\sum_{j=0}^{m}a_j^{-2\sigma}}\right)^{-1},$$

то уравнение (1) имеет единственное решение из $X^{1,\sigma}$ при $f(t)\in Y^{0,\sigma}$.

**Доказательство.** Левую часть уравнения (1) представим в виде суммы двух слагаемых

$$L(t)U(t)=LU(t)+L_1(t)U(t)$$

$$LU(t)=\sum_{j=0}^{m}\{tU'(b_jt)+A_jU(a_jt)\},$$

$$L_1(t)U(t)=\sum_{j=0}^{m}A_jU(a_jt).$$

В силу условий теоремы оператор L непрерывно обратим.

Оценим теперь норму оператора $L_1$

$$\left(\left||L_1(t)U(t)|\right|^{0..\sigma}\right)^2=\int_0^{\infty}t^{2\sigma-1}\left||L_1(t)U(t)|\right|_y^2dt\leq$$

$$\leq\int_0^{\infty}t^{2\sigma-1}\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\|A_j(t)\|_y\cdot\|U(a_jt)\|_x\right)^2dt<$$

$$< (m+1)\cdot\left(\|L^{-1}\|^{1,\sigma}\sqrt{m+1\sum_{j=0}^{m}a_j^{-2\sigma}}\right)^{-2}\cdot\sum_{j=0}^{m}\int_0^\infty t^{2\sigma-1}\left\|U(a_jt)\right\|_x^2dt=$$

$$=(\|L^{-1}\|^{1,\sigma})^{-2}\int_0^\infty t^{2\sigma}\cdot\|U(t)\|_x^2\le(\|L^{-1}\|^{1,\sigma})^{-2}(\|U(t)\|^{1,\sigma})^2.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Получим асимптотическую формулу для решений уравнения нейтрального типа с переменными коэффициентами (1) через решение соответствующего однородного уравнения.

Операторнозначную функцию

$$L(\lambda)=\sum_{j=0}^{m}\left(A_ja_j^{-\lambda}-\lambda b_j^{-\lambda-1}\cdot E\right)$$

будем называть операторным квазипучком [9].

**Лемма 2**. Если $\lambda_0 - n-$ кратный полюс резольвенты $R(\lambda)$, то функция

$$U(t)=\ t^{-\lambda_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\ln t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\varphi_k \quad (5)$$

где $\varphi_0$ –собственный вектор ,а $\varphi_1,\varphi_{2,\dots,}\varphi_{n-1}-$ присоединенные вектора пучка $L(\lambda)$, соответствующее собственному значению $\lambda_{0,}$ являются решениями уравнения (2) при $f(t)=0$.

Справедливость леммы проверяется непосредственной подстановкой $U(t)$ в уравнение (2).

**Теорема 3**. Если $\left\|A_j(t)\right\|_y\le C\cdot t^{-\sigma}, j=0,1,2,\dots,m$ при $t\to\infty$ регулярна в полосе $0<Re\lambda<\sigma$ за исключением полюсов $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ кратности $S_1,S_2,\dots,S_n$ соответственно; при $|\lambda|>\max\limits_{k\ge1}|Re\lambda_k|, |\lambda|\to\infty$ в полосе $0\le Re\lambda\le\sigma$; $\varphi_0^k,\varphi_1^k,\dots,\varphi_{s_k-1}^k-$ собственный и присоединенные вектора квазипучка $L(\lambda)$, соответствующие полюсу $\lambda=\lambda_k$, $k=1,2,\dots,n, f(t)\in Y^{0,\sigma}\cap Y^{0,0}$, то имеет место асимптотическая формула

$$\left\|U(t)-\sum_{k=1}^{n}t^{-\lambda_k}\sum_{e=0}^{s_k-1}\frac{(\ln t)^{s_k-e-1}}{(s_k-e-1)}\varphi_e^k\right\|^{0,\sigma}\le$$

$$\le C\cdot\left(\int_0^\infty t^{2\sigma-1}\|f(t)\|_y^2dt+\int_0^\infty\|U(t)\|_x^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

для любого решения $U(t)\in X^{1,\sigma}\cap X^{1,0}$уравнения (1) где постоянная $C$ не зависит от решения $U(t)$.

**Доказательство.** Уравнение (1) перепишем так

$$\sum_{j=0}^{m}\left\{tU'(b_jt)+A_jU(a_jt)\right\}=f(t)\sum_{j=0}^{m}A_j(t)U(a_jt)$$

Применив к обеим частям последнего равенства преобразование Меллина на прямой $Re\lambda=\sigma$, получим

$$\widetilde{U}(\lambda)=R(\lambda)\left\{\tilde f(\lambda)-\sum_{j=0}^{m}\int_0^\infty t^{\lambda-1}A_j(t)U(a_jt)dt\right\}$$

В силу условий теоремы полюса $R(\lambda)$ и $\widetilde{U}(\lambda)$ в полосе $0\le Re\lambda\le\sigma$ совпадают , так как выражение в фигурных скобках регулярна в полосе $0\le Re\lambda\le\sigma$ . Пусть эти полюса находятся внутри прямоугольника

$$\Pi=\{\lambda:0\le Re\lambda\le\sigma,|\mathcal{J}_m\lambda|\le b\},$$

контур которого обозначим через Г.

Из леммы Римана-Лебега [3] следует, что

$$\int_{i\alpha}^{\sigma+i\alpha} t^{-\lambda}\widetilde{U}(\lambda)d\lambda \to 0 \text{ при } |\alpha| \to \infty \tag{6}$$

По теореме Коши [5] об интеграле по замкнутому контуру и в силу (6), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^{-\lambda}\widetilde{U}(\lambda)d\lambda = \sum_{k=1}^{n} res_{\lambda_k}\left\{t^{-\lambda}R(\lambda)\left[\tilde{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^{m}\int_0^{\infty} t^{\lambda-1}A_j(t)U(a_j t)dt\right]\right\}$$

или

$$U(t) - \sum_{k=1}^{n} U_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda}\,\widetilde{U}(\lambda)d\lambda, \tag{7}$$

где

$$U_k(t) = t^{-\lambda_k}\cdot\sum_{e=0}^{s_k-1}\frac{(\ln t)^{s_k-e-1}}{(s_k-e-1)}\varphi_e^{(k)} -$$

решение однородного уравнения $LU(t) = 0$, связанное с полюсом $\lambda_k$ резольвенты $R(\lambda)$ кратности $s_k$.

Оценивая интеграл, получим

$$\int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}\cdot\left\|U(t) - \sum_{k=0}^{n} U_k(t)\right\|_y^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\widetilde{U}(\sigma+it)\right\|_y^2 dt \le$$

$$\le C\cdot\int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}\cdot\left\|f(t) - \sum_{k=0}^{n} A_j(t)U(a_j t)\right\|_y^2 dt \le$$

$$\le 2\cdot\int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}\cdot\|f(t)\|_y^2 dt + 2 \le \int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\left\|A_j(t)\right\|_y\left\|U(a_j t)\right\|_x\right)^2 dt \le$$

$$\le 2(\|f(t)\|^{0,\sigma})^2 + 2(m+1)\int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}\cdot t^{-2\sigma}\sum_{j=0}^{m}\left\|U(a_j t)\right\|_x^2 dt \le$$

$$\le C\left(\int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}\|f(t)\|_y^2 dt + \int_0^{\infty}\|U(t)\|_x^2\frac{dt}{t}\right).$$

Теорема доказана.

**Литература**

1. Алиев Р.Г. ФДУ в гильбертовом пространстве. -Махачкала: Издательство ДГУ, 2010. -348с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. -М., 1990.620с.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. -М.:«Наука», 1993г.
4. Колмогоров А.И., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.:«Наука», 2017г.
5. Алейдаров С.М. Конечномерность ядра оператора L в гильбертовом пространстве со степенным весом. Вестник ДГУ, I выпуск, 2011г., с.60-64.
6. Алиев Р.Г., Алейдаров С.М. Разрешимость ФДУ второго порядка в пространствах со степенным весом. Вестник ДГУ, I выпуск, 2014г.,с.109-116.
7. Алейдаров С.М. Асимптотика решений ФДУ первого порядка в гильбертовом пространстве со степенным весом. Фундаментальные и прикладные проблемы

математики и информатики. Махачкала, ДГУ, 2017г., с.24-27.

8. Алейдаров С.М. Существование решений одного частного случая уравнения нейтрального типа в пространствах со степенным весом. . Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Махачкала, ДГУ, 2019г., с.14-16.

9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы фундаментального анализа. -М.2017г., 560с.

10. Алейдаров С.М. Оценка решений ФДУ первого порядка в пространствах со степенным весом. Актуальные проблемы математики и смежные вопросы. Махачкала, ДГПУ, 2018г., с.21-24.

**Literature**

1. Aliev R.G. FDE in Hilbert space. -Makhachkala: DSU Publishing House, 2010. -348s.

2. Crane S.G. Linear differential equations in a Banach space. -M., 1990.620s.

3. Titchmarsh E. Introduction to the theory of Fourier integrals. -M.: "Science", 1993.

4. Kolmogorov A.I., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. -M.: "Science", 2017

5. Aleidarov S.M. Finite-dimensionality of the kernel of the operator L in a Hilbert space with a power-law weight. DGU Bulletin, I edition, 2011, pp. 60-64.

6. Aliev R.G., Aleidarov S.M. Solvability of second-order FDEs in spaces with power-law weights. DGU Bulletin, 1st edition, 2014, p.109-116.

7. Aleidarov S.M. Asymptotics of solutions of first-order FDEs in a Hilbert space with a power-law weight. Fundamental and applied problems of mathematics and computer science. Makhachkala, DSU, 2017, pp. 24-27.

8. Aleidarov S.M. Existence of solutions of one particular case of an equation of neutral type in spaces with power-law weight. ... Fundamental and applied problems of mathematics and computer science. Makhachkala, DSU, 2019, pp. 14-16.

9. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Elements of fundamental analysis. -M. 2017, 560s.

10. Aleidarov S.M. Estimation of solutions of first-order FDEs in spaces with power-law weights. Actual problems of mathematics and related issues. Makhachkala, DGPU, 2018, p.21-24.